

Завдання II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

6 клас

1. Знайти простий спосіб обчислення і використати його для обчислення суми:
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 10}$$
2. У родині 4 особи. Якщо Марійці підвищити стипендію удвічі, то загальний прибуток усієї родини зросте на 5%, якщо замість цього мамі підвищити зарплату удвічі, то — на 15%, а якщо ж підвищити удвічі зарплату татові, то — на 25%. На скільки відсотків зросте прибуток усієї родини, якщо підвищити удвічі пенсію дідусеві?
3. У трьох скриньках лежать горіхи. У першій скриньці горіхів на 6 менше, ніж у двох інших разом, а в другій — на 10 менше, ніж у першій і третій разом. Скільки горіхів у третій скриньці ?
4. Вася задумав число і поділив його на 100. У результаті вийшло число на 34,65 менше задуманого. Яке число задумав Вася?
5. Як потрібно розрізати прямокутник із сторонами 16 см і 9 см на дві частини так, щоб з цих частин можна було б скласти квадрат ?

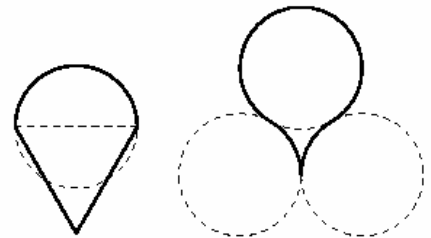
На виконання роботи виділяється 4 години.

Використання записників і калькулятора не дозволяється.

Завдання II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

7 клас

1. Знайдіть чотиризначне число, у якого сума перших трьох цифр дорівнює 19, а сума останніх трьох цифр дорівнює 27.
2. Папа Карло змайстрував Буратіно за 5 днів. На скільки відсотків він повинен підвищити продуктивність своєї праці, щоб на створення Буратіно пішло 4 дні?
3. Між містами A і B по гірській дорозі через перевал регулярно ходить автобус. Під час підйому на перевал він їде зі швидкістю 25 км/год , а під час спуску – 50 км/год . Час його руху від A до B – 3,5 години, а від B до A – 4 години. Знайдіть відстань від A до B .
4. Наталя та Інна купили однакові коробки чаю в пакетиках. Відомо, що одного пакетика вистачає на дві або три чашки чаю. Наталі вистачило пакетиків із коробки лише на 41 чашку чаю, а Інні – лише на 58 чашок чаю. Скільки пакетиків чаю було в коробці?
5. Іванко і Петрик на уроці креслення намалювали пуголовків (чотири кола на малюнку – одного радіуса, трикутник – рівносторонній, горизонтальна сторона цього трикутника – діаметр кола). Який з пуголовків має більшу площу?



На виконання роботи виділяється 4 години.

Використання записників і калькулятора не дозволяється.

Завдання II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

8 клас

1. Розв'яжіть рівняння $a^2x - 3 = a + 9x$ для всіх значень параметра a .
2. Знайдіть найбільше значення виразу $xу$, якщо відомо, що $x + 2y = 1$.
3. Вітя, Антон та Сергійко грали сніговими кульками. Першу снігову кульку кинув Антон. Потім у відповідь на кожну кульку, що в нього влучила, Вітя кидав 6 кульок, Сергійко – 5 кульок, а Антон – 4 кульки. Через деякий час гру було закінчено. Знайдіть, в кого скільки снігових кульок влучно, якщо повз ціль пролетіли 13 кульок. (У себе самого сніговими кульками не кидаються).
4. Придумайте таке десятизначне число, у записі якого немає нулів, щоб при додаванні до нього добутку його цифр було отримано число з таким самим добутком цифр.
5. У трикутнику ABC на сторонах AC і BC взяті такі точки X і Y , що $\angle ABX = \angle YAC$, $\angle AYB = \angle BXC$, $XC = YB$. Знайдіть кути трикутника ABC .

На виконання роботи виділяється 4 години.

Використання записників і калькулятора не дозволяється.

**Завдання II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з
математики
9 клас**

1. Розв'яжіть рівняння $|x + 4| + |x| + |x - 4| = 8 - x^2$.
2. Знайдіть значення x , при якому функція $y = (x-a)^2 + (x-b)^2$ набуває свого найменшого значення.
3. Добуток п'яти чисел не дорівнює нулю. Кожне з цих чисел зменшили на одиницю, при цьому їх добуток не змінився. Наведіть хоча б один приклад.
4. У магазині три поверхи, переміщуватися між якими можна тільки ліфтом. Дослідження відвідуваності поверхів магазину показало, що з початку робочого дня і до закриття магазину:
а) з покупців, що входять у ліфт на другому поверсі, половина їде на перший поверх, а половина – на третій;
б) серед покупців, які виходять з ліфта на третьому поверсі, менше третини.
На який поверх покупці частіше їздили з першого поверху, на другий чи на третій?
5. У коло вписаний прямокутний трикутник ABC з гіпотенузою AB . Нехай K – середина дуги BC , що не містить точку A ; N – середина відрізка AC , M – точка перетину променя KN з колом. У точках A і C проведені дотичні до кола, які перетинаються в точці E . Доведіть, що $\angle EMK = 90^\circ$.

На виконання роботи виділяється 4 години.

Використання записників і калькулятора не дозволяється.

Завдання II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

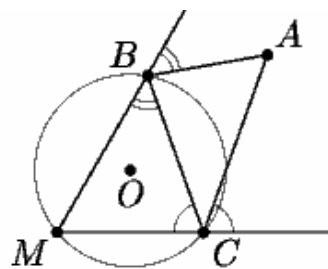
10 клас

1. Розв'яжіть рівняння $\frac{x}{x-a} - \frac{2a}{x+a} = \frac{8a^2}{x^2 - a^2}$ для всіх значень параметра a .

2. У деяких країнах сумарна зарплата 10% найбільш високооплачуваних працівників становить 90% зарплати всіх працівників. Чи може так бути, що в кожному з регіонів, на які ділиться ця країна, зарплата будь-яких 10% працівників становить не більше 11% всієї зарплати, що виплачується в цьому регіоні?

3. Побудуйте графік функції

$$y = x^3 (\sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-1}).$$



4. У ряд записані числа від 1 до 2000. Двоє гравців роблять ходи по черзі. За один хід дозволяється викреслити будь-яке із записаних чисел разом з усіма його дільниками. Виграє той, хто закреслить останнє число. Доведіть, що у першого гравця є спосіб грати так, щоб завжди вигравати.

5. У середині кута з вершиною M позначена точка A . З цієї точки випустили кульку, яка відбилася від однієї сторони кута в точці B , потім від іншої сторони в точці C і повернулась у точку A («кут падіння» дорівнює «куту відбиття»). Доведіть, що точка O — центр кола, описаного навколо трикутника BCM , лежить на прямій AM .

На виконання роботи виділяється 4 години.

Використання записників і калькулятора не дозволяється.

Завдання II етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики

11 клас

1. Розв'яжіть рівняння для всіх значень параметра a
 $\sin^2 x - (2a + 1)\sin x + a^2 + a = 0$.
2. Чи існують три квадратних тричлена, такі що кожен з них має два різних дійсних кореня, а сума будь-яких двох тричленів не має дійсних коренів?
3. Чи може сума 1000 послідовних непарних чисел бути сьомим степенем натурального числа? Відповідь обґрунтуйте.
4. Знайдіть найменшу відстань між точками прямої $y = x - 1$ і параболи $y = x^2$.
5. По ребрах опуклого многогранника з 2011 вершинами проведена замкнена ламана, що проходить через кожну вершину рівно один раз. Доведіть, що в кожній з частин, на які ця ламана ділить поверхню многогранника, кількість граней з непарним числом сторін – непарна.

На виконання роботи виділяється 4 години.

Використання записників і калькулятора не дозволяється.