ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, III етап

26 січня – 27 січня 2013 року, м.Львів

7 клас

1. У хлопчика є два різних пісочних годинника на 7 хвилин і 11 хвилин. Йому потрібно зварити на сніданок куряче яйце, яке вариться 10 хвилин. Як відміряти цей проміжок часу за допомогою цих пісочних годинників?

Розв'язок. Назвемо пісочні годинники: на 7 хв. — першим, а на 11 хв. — другим. Якщо пісочні годинники "запустити" одночасно, то через 7 хв. у першому годиннику завершиться відлік часу, а у другого залишиться ще 4 хв. Якщо у цей момент часу ми знову запустимо перший годинник, то після того, як другий годинник завершить свій відлік часу (останніх 4 хв.), у першого залишиться ще 3 хв. Розпочавши у цей момент часу варіння курячих яєць, ми через 3 хв знову запустимо перший годинник і через 7 хв отримаємо потрібний результат.

2. Скільки нескоротних дробів $a = \dfrac{2011}{n}$, де n — натуральне число, задовольняють умову

$$\frac{1}{2013} < \frac{2011}{n} < \frac{1}{2012}?$$

Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. 2010 дробів. **Розв'язок.** Перепишемо умову у вигляді

$$2011^2 + 2011 = 2011 \cdot 2012 < n < 2011 \cdot 2013 = 2011^2 + 2011 + 2011.$$

Звідси, $n = 2011^2 + 2011 + k$, де $1 \le k \le 2010$. Але, 2011 — просте число.

3. Перевірте, чи число

$$\frac{10^{2013} + 62}{18}$$

є натуральним числом. Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. Так, дане число — натуральне. **Розв'язок.** Оскільки сума цифр числа $10^{2013} + 62$ дорівнює 9, то число $10^{2013} + 62$ ділиться на 9 за ознакою подільності на 9. З іншого боку дане число — парне і, отже, ділиться на 2.

4. Цифри x, y, z такі, що для чотирицифрових чисел виконується рівність

$$\overline{xxyy} - \overline{yyzz} + \overline{xyzx} - \overline{yxxz} = 2 \cdot \overline{x0zz} - 2 \cdot \overline{y000},$$

де запис $\overline{abcd}$ означає чотирицифрове число з цифрами a, b, c, d, наприклад, $\overline{2345} = 2345$. Знайти всі такі значення x, y, z.

Відповідь. $(x,y,z)=\{(1,3,1),(2,6,2),(3,9,3)\}$. **Розв'язок.** Задана рівність переписується у вигляді

$$1100x+11y-1100y-11z+1001x+100y+10z-1000y-110x-z=2000x+22z-2000y,$$

звідки отримуємо рівність $9x-11y+24z=0$, звідси, y — ділиться на 3, тобто має вигляд $y=3k,\ 1\le k\le 3$. Тому рівність перепишеться у вигляді $3x-11k+8z=0 \iff 11k-3x=8z$. Оскільки $11k-3x\le 33-3=30$, то $z\le\frac{30}{8}=3,75 \Longrightarrow z\le 3$. Остаточно при $z=1$ отримуємо $11k-3x=8 \Longrightarrow k=1, x=1$; при $z=2$ отримуємо $11k-3x=16 \Longrightarrow k=2, x=2$; при $z=3$ отримуємо $11k-3x=24 \Longrightarrow k=3, x=3$.

5. Велосипедист у вітряну погоду їде спочатку проти вітру з пункту А в пункт В, а потім за вітром повертається назад. Відомо, що при русі за вітром швидкість велосипедиста зростає на 50 $^\circ/_\circ$, а проти вітру — зменшується на 25 $^\circ/_\circ$ у порівнянні з його швидкістю у безвітряну погоду. Чи виявиться час такої поїздки велосипедиста менший за час, який би він витратив на таку ж подорож у безвітряну погоду? Відповідь обґрунтувати.

Відповідь. Час руху однаковий. **Розв'язок.** Нехай швидкість велосипедиста у безвітряну погоду x, тоді $x+0,5x$ його швидкість за вітром, а $x-0,25x$ — швидкість проти вітру. Нехай s — шлях у кілометрах, який проїжджає велосипедист в одному напрямку. Тоді час витрачений на поїздку у вітряну погоду

$$t_1=\frac{s}{x-0,25x}+\frac{s}{x+0,5x}=\frac{6s}{3x}=\frac{2s}{x},$$

а у безвітряну погоду

$$t_2=\frac{2s}{x}.$$

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, III етап

26 січня – 27 січня 2013 року, м.Львів

8 клас

1. Розв'язати рівняння

$$x^3 + 5x^2 + 3x = 9.$$

Відповідь. $x \in \{1; -3\}$. **Розв'язок.** Після послідовних перетворень маємо

$$x^3 + 5x^2 + 3x - 9 = x^3 - x^2 + 6x^2 - 6x + 9x - 9 =$$
$$= x^2(x-1) + 6x(x-1) + 9(x-1) = (x-1)(x^2+6x+9) = (x-1)(x+3)^2.$$

2. Чи існує трикутник, довжини сторін якого дорівнюють $a = \sqrt{2012}, b = \sqrt{2013}, c = 0,012$? Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. Так, існує. **Розв'язок.** Досить перевірити, чи виконуються нерівності $a < b + c,\ b < a + c,\ c < a + b$. Остання і перша нерівності очевидні. Тому, досить перевірити другу нерівність

$$\sqrt{2013} < \sqrt{2012} + c \Longleftrightarrow c > \frac{1}{\sqrt{2013} + \sqrt{2012}}.$$

Але,

$$\frac{1}{\sqrt{2013} + \sqrt{2012}} < \frac{1}{2\sqrt{2012}} = \frac{1}{\sqrt{8048}} < \frac{1}{89} < 0,012 = c.$$

3. Знайти всі цілі значення x, для яких $|(2x-1)(2x-2013)|$ — просте число. Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. $x \in \{1, 1006\}$. **Розв'язок.**

Оскільки $|(2x-1)(2x-2013)| = |2x-1| \cdot |2x-2013|$ — просте число, то один з множників дорівнює одиниці, а інший — просте число. З рівностей $2x - 1 = \pm 1,\ 2x - 2013 = \pm 1$ знаходимо відповідь.

4. Знайти найбільше значення параметра a, для якого всі дійсні значення x задовольняють нерівність

$$-2013 \cdot |x - a| + a \cdot |a - x| < 1.$$

Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. $a = 2013$. **Розв'язок.** Якщо $a \leq 2013$, тобто $a - 2013 \leq 0$, то $-2013 \cdot |x - a| + a \cdot |a - x| = (a - 2013)|x - a| \leq 0 < 1$, тобто, нерівність виконується для всіх дійсних значень x. Якщо ж $a - 2013 > 0$, то для $x = a + \dfrac{1}{a - 2013}$

$$-2013 \cdot |x - a| + a \cdot |a - x| = (a - 2013)|x - a| = 1,$$

тобто, нерівність не виконується.

5. Чи існує опуклий п'ятикутник, довжина однієї зі сторін якого дорівнює 1, а довжини всіх його діагоналей виражаються натуральними числами? Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. Так, існує. **Розв'язок.** Побудуємо такий п'ятикутник $ABCDF$. Для визначеності виберемо $AB = 1$. Тоді вершину D виберемо як третю вершину рівнобедреного трикутника ADB з основою AB і бічними сторонами $AD = BD = 2$. Вершину C виберемо як третю вершину рівнобедреного трикутника DAC з основою $CD < 1$ і бічними сторонами $AD = AC = 2$. Вершину F виберемо як точку перетину кіл з центрами у точках B і C відповідно радіуса 2. Тоді діагоналі $AD = BD = AC = CF = BF = 2$.

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, III етап

26 січня – 27 січня 2013 року, м.Львів

9 клас

1. Розв'язати рівняння

$$x^3 + 7x^2 + 8x = 16.$$

Відповідь. $x \in \{1; -4\}$. **Розв'язок.** Після послідовних перетворень маємо

$$x^3 + 7x^2 + 8x - 16 = x^3 - x^2 + 8x^2 - 8x + 16x - 16 =$$
$$= x^2(x-1) + 8x(x-1) + 16(x-1) = (x-1)(x^2+8x+16) = (x-1)(x+4)^2.$$

2. Нехай a, b — катети прямокутного трикутника, а c — його гіпотенуза. Довести, що

$$a^3 + b^3 < c^3.$$

Розв'язок. Оскільки $a < c$ і $b < c$, то $a^3 < a^2c$ і $b^3 < b^2c$. Додавши дві останні нерівності отримаємо

$$a^3 + b^3 < a^2c + b^2c = (a^2 + b^2)c = c^3.$$

3. Для яких натуральних значень n число $\dfrac{10^{n+1}+44}{36}$ натуральне. Відповідь обгрунтувати.

Розв'язок. Сума цифр числа $10^{n+1} + 44$ для будь-якого натурального значення n дорівнює 9, тому за ознакою подільності на 9 воно ділиться на 9. З іншого боку дві останні цифри даного числа складають число 44, яке ділиться на 4. Тому, за ознакою подільності на 4 число $10^{n+1} + 44$ ділиться на 4.

4. Визначити всі значення параметра a, при яких рівняння

$$|2x - 1| + (2a + 1)\sqrt{x} - a - 1 = 0$$

має непорожню множину розв'язків. Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. Для $a \in \mathbb{R}$. **Розв'язок.** Якщо підставити у рівняння $x = \frac{1}{4}$, то рівняння перетворюється у тотожну за a рівність, тобто для кожного дійсного значення a задане рівняння має корінь $x = \frac{1}{4}$, і тому множина його розв'язків — непорожня.

5. Середньою лінією чотирикутника називається відрізок, що сполучає середини протилежних сторін. Довести, що для того щоб діагоналі чотирикутника були взаємно перпендикулярними необхідно і досить, щоб довжини середніх ліній чотирикутника дорівнювали одна одній.

Розв'язок. Нехай $ABCD$ заданий чотирикутник, точки M, N, E, F, відповідно, середини сторін AB, CD, BC, AD, тоді $EF,\ MN$ — середні лінії. Чотирикутник $MENF$ — паралелограм, бо його сторони паралельні до діагоналей AC, BD; середні лінії $EF,\ MN$ є діагоналями $MENF$. Отже, перпендикулярність AC і BD рівносильна до того, що $MENF$ — прямокутник. Останнє ж є рівносильним до того, що у довжини діагоналей паралелограма $MENF$ однакові $EF = MN$.

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, III етап

26 січня – 27 січня 2013 року, м.Львів

10 клас

1. Розв'язати нерівність

$$x^2 - 2013 \cdot x - 2012 - \frac{2013}{x} + \frac{1}{x^2} < 0.$$

Відповідь. $x \in (1007 - \sqrt{1006 \cdot 1008}, 1007 + \sqrt{1006 \cdot 1008})$.
Розв'язок.

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2013\Big(x + \frac{1}{x}\Big) - 2012 < 0, \quad \Big(x + \frac{1}{x}\Big)^2 - 2 - 2013\Big(x + \frac{1}{x}\Big) - 2012 < 0.$$

Нехай $t = x + \frac{1}{x}$. Тоді $t^2 - 2013t - 2014 < 0$ і $-1 < t < 2014$. Тобто,

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} > -1, \\ x + \frac{1}{x} < 2014, \end{cases} \iff \begin{cases} x > 0, \\ x \in (-\infty, 0) \bigcup (1007 - \sqrt{1006 \cdot 1008}, 1007 + \sqrt{1006 \cdot 1008}), \end{cases}$$

$\iff x \in (1007 - \sqrt{1006 \cdot 1008}, 1007 + \sqrt{1006 \cdot 1008})$.

2. Яке число більше $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2012 \cdot 2013$ чи 1007^{2013} ? Відповідь обгрунтувати.

Відповідь. Друге число більше. **Розв'язок.** Зауважимо, що $(n-k)k = nk - k^2 = -(k - \frac{n}{2})^2 + (\frac{n}{2})^2 \le (\frac{n}{2})^2$. Тому,

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 2012 \cdot 2013 = 1007(1 \cdot 2013)(2 \cdot 2012) \cdot (3 \cdot 2011) \cdots (1006 \cdot 1008) \le$$

$$\le 1007 \cdot \Big(\frac{2014}{2}\Big)^{1006 \cdot 2} = 1007^{2013}.$$

3. У трапецію вписано коло, точка дотику якого до однієї з бічних сторін ділить її на відрізки довжиною n і m, $n \ne m$. Обчислити довжини основ трапеції, якщо її периметр $P = 4(n+m)$.

Відповідь. Довжини основ $(a, b) \in \{(2m, 2n), (n+m, n+m)\}$. **Розв'язок.** Не зменшуючи загальності вважаємо, що $n > m$. Нехай у трапеції $ABCD : K, L$ — точки дотику кола до бічних сторін CD, AB відповідно; M, N — точки дотику кола до основ BC, AD відповідно; $CK = m, KD = n$; $BL = x, AL = y$; $CC_1 = h, BB_1 = h$ — висоти трапеції, проведені з відповідних вершин верхньої основи на нижню основу. Маємо $CM = CK = m$, $KD = C_1D = n$, $BL = BM = x$, $AL = AN = y$ (як попарні дотичні проведені до кола з однієї точки). Тоді з прямокутних трикутників CC_1D і BB_1A маємо

$$h^2 = (n+m)^2 - (n-m)^2 = 4nm, \quad h^2 = (x+y)^2 - (y-x)^2 = 4xy.$$

Тому, $xy = nm$. Периметр трапеції дорівнює $P = 2(x+y) + 2(n+m) = 4(n+m)$, звідки $x+y = n+m$. Розв'язуючи систему $\begin{cases} xy = nm, \\ x+y = n+m \end{cases}$, отримуємо відповідь.

4. Розв'язати рівняння

$$\frac{x^2 - 1 + |x+1|}{|x|(x-2)} = 2.$$

Відповідь. x=5.

5. Знайти всі пари чисел (x, y) таких, що

$$\begin{cases} x + y + \sqrt{x^2 - y^2} = 12, \\ y\sqrt{x^2 - y^2} = 12. \end{cases}$$

Відповідь. (5;3), (5;4). **Розв'язок.** З другої системи рівняння отримаємо $\sqrt{x^2 - y^2} = \frac{12}{y}$ і підставимо в перше рівняння $x + y + \frac{12}{y} = 12$, $x = \frac{-y^2+12y-12}{y}$. Тоді

$$y^2(x^2 - y^2) = 144, \quad y^2\left(\left(\frac{-y^2 + 12y - 12}{y}\right)^2 - y^2\right) = 144.$$

Після спрощень отримуємо $y(y^2 - 7y + 12) = 0 \Longleftrightarrow y_1 = 3,\ y_2 = 4$. Звідки за формулою $x = \frac{-y^2+12y-12}{y}$ отримаємо $x_1 = x_2 = 5$. Зробивши перевірку, одержимо, що (5;3), (5;4) є шуканиими розв'язками системи.

ВСЕУКРАЇНСЬКА ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ, III етап

26 січня – 27 січня 2013 року, м.Львів

11 клас

1. Розв'язати рівняння

$$2x\sqrt{3-x} = x^2 + 3.$$

Відповідь. Розв'язків нема.

Розв'язок. Перепишемо рівняння

$$2\sqrt{3-x} = x + \frac{3}{x}.$$

Зрозуміло, що ОДЗ рівняння $0 \le x \le 3$, і, тому, $x + \frac{3}{x} \ge 2\sqrt{3},\ 2\sqrt{3-x} \le 2\sqrt{3}$. Але, $2\sqrt{3-x} < 2\sqrt{3}$ для $x > 0$.

2. Нехай $a,\ b$ — катети прямокутного трикутника, а c — його гіпотенуза. Довести, що

$$\frac{c^3}{\sqrt{2}} \le a^3 + b^3 < c^3.$$

Розв'язок. Оскільки $a < c$ і $b < c$, то $a^3 < a^2c$ і $b^3 < b^2c$. Додавши дві останні нерівності отримаємо

$$a^3 + b^3 < a^2c + b^2c = (a^2 + b^2)c = c^3.$$

Далі, нехай

$$\varphi(x) = x^3 + (c^2 - x^2)^{3/2}.$$

Досліджуючи цю функцію на екстремум на проміжку $[0, c]$, послідовно маємо

$$\varphi'(x) = 0 \iff x = x_0 = \frac{c}{\sqrt{2}},$$

$\varphi(0) = \varphi(c) = c^3 \implies \varphi(x_0) = \frac{c^3}{\sqrt{2}} = \min\{\varphi(x) \colon x \in [0, c]\}$.

3. Нехай $a_n \ge 0$ для всіх $1 \le n \le 2013$ і

$$a_1 + a_2\sqrt{a_2} + a_3\sqrt[3]{a_3} + a_4\sqrt[4]{a_4} + \ldots + a_{2013}\sqrt[2013]{a_{2013}} \le 1.$$

Довести, що $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2013} < 3$.

Розв'язок. Позначимо $k = 2013$, $N_1 = \{n\colon \sqrt[n]{a_n} \le 0,5,\ n \le k\}$, $N_2 = \{n\colon \sqrt[n]{a_n} > 0,5,\ n \le k\}$. Для $n \in N_1$ маємо $a_n \le 2^{-n}$, тому

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k \le a_1+\sum_{n\in N_1} a_n+\sum_{n\in N_2} \frac{a_n\sqrt[n]{a_n}}{\sqrt[n]{a_n}} \le \sum_{n=1}^{k} 2^{-n}+2(a_1+\sum_{k=1}^{k} a_n\sqrt[n]{a_n}) \le$$

$$\le 2^{-1}\frac{1-2^{-k}}{1-2^{-1}}+2 = 3-2^{-k} < 3.$$

4. Довести, що нерівність

$$\frac{x}{\sqrt{2y^2+3}}+\frac{y}{\sqrt{2x^2+3}} \le \sqrt{\frac{2012}{2013}}$$

виконується для всіх $x, y \in [0,1]$.
Розв'язок. Припустимо, що $0 \le x \le y \le 1$ (випадок $0 \le y \le x \le 1$ розглядається подібно). У цьому випадку досить довести, що

$$\frac{x+1}{\sqrt{2x^2+3}} \le \sqrt{\frac{2012}{2013}} \Longleftrightarrow (x^2+2x+1)\cdot 2013 \le 2012\cdot(2x^2+3) \Longleftrightarrow$$

$$f(x) \overset{def}{=} (2\cdot 2012-2013)x^2-2\cdot 2013x+3\cdot 2012-2013 \ge 0.$$

Вершина цієї параболи у точці

$$x_0 = \frac{2013}{2\cdot 2012-2013} = \frac{2013}{2011} > 1.$$

Тому функція $y = f(x)$ — спадна на $[0,1]$ і, отже, для всіх $x \in [0,1]$

$$f(x) \ge f(1) = 2\cdot 2012-2013-2\cdot 2013+3\cdot 2012-2013 = 5\cdot 2012-4\cdot 2013 = 2008 > 0.$$

5. Чи існує опуклий шестикутника, одна зі сторін якого має довжину 1, а довжини всіх його діагоналей — натуральні числа? Відповідь обгрунтувати.
Відповідь. Ні, не існує. **Розв'язок.** Міркуючи від супротивного припустимо, що такий шестикутник існує. Діагоналі, що сполучають сторону довжиною 1 з протилежними вершинами повинні бути однаковими (як цілочисельні довжини, різниця яких менша за 1), причому таких пар є не

менше, ніж дві. Тому одна з вершин многокутника (вершина рівнобедреного трикутника, утвореного цією стороною і парою менших діагоналей) лежатиме всередині рівнобедренного трикутника, утвореного цією стороною і двома більшими з двох пар діагоналями, що суперечить опуклості многокутника.

6. В залежності від параметра a розв'язати рівняння

$$\sin(\frac{5}{3}\pi\cos(\pi x)) + \cos(\frac{5}{3}\pi\cos(\pi x)) = a.$$

Відповідь. Див. Розв'язок.

Розв'язок.

Оскільки задане рівняння рівносильне до рівняння

$$\sqrt{2}\sin(\frac{5}{3}\pi\cos(\pi x) + \frac{\pi}{4}) = a,$$

то рівняння має розв'язки при $|a| \le \sqrt{2}$ і немає розв'язків при $|a| > \sqrt{2}$.

Отже, з останнього рівняння при $|a| \le \sqrt{2}$ отримуємо

$$\cos(\pi x) = -0,15 + (-1)^n \frac{3}{5\pi}\arcsin\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{3}{5}n \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Звідки:

- при $n = 0$, оскільки $-0,15 + \frac{3}{5\pi}\arcsin\frac{a}{\sqrt{2}} \in [-1, 1]$,

$$x_1 = \pm\frac{1}{\pi}\arccos(-0,15 + \frac{3}{5\pi}\arcsin\frac{a}{\sqrt{2}}) + 2k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

- при $n = 1$, оскільки $0,45 - \frac{3}{5\pi}\arcsin\frac{a}{\sqrt{2}} \in [-1, 1]$,

$$x_2 = \pm\frac{1}{\pi}\arccos(0,45 - \frac{3}{5\pi}\arcsin\frac{a}{\sqrt{2}}) + 2k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

- при $n = -1$, оскільки $-0,75 - \frac{3}{5\pi}\arcsin\frac{a}{\sqrt{2}} \in [-1, 1] \Longleftrightarrow -1 \le \frac{a}{\sqrt{2}} \le \sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$, то для таких a

$$x_3 = \pm\frac{1}{\pi}(\pi - \arccos(0,75 + \frac{3}{5\pi}\arcsin\frac{a}{\sqrt{2}})) + 2k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

- при $n=2$, оскільки $-0,15+1,2+\frac{3}{5\pi}\arcsin\frac{a}{\sqrt{2}}\in[-1,1]\iff -1\le\frac{a}{\sqrt{2}}\le-\sin\frac{\pi}{12}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$, то для таких a

$$x_4=\pm\frac{1}{\pi}\arccos(1,05+\frac{3}{5\pi}\arcsin\frac{a}{\sqrt{2}})+2k,\quad k\in\mathbb{Z};$$

- при $n=-2$, оскільки $-0,15-1,2+\frac{3}{5\pi}\arcsin\frac{a}{\sqrt{2}}\in[-1,1]\iff\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\le\frac{a}{\sqrt{2}}\le1$, то для таких a

$$x_5=\pm\frac{1}{\pi}(\pi-\arccos(1,35-\frac{3}{5\pi}\arcsin\frac{a}{\sqrt{2}}))+2k,\quad k\in\mathbb{Z}.$$